جامعة دمشق
المعهد العالي للبحوث والدراسات الزلزالية

ديناميك المنشآت

Lec.04

Single Degree of Freedom (SDOF)
(الاستجابة لاهتزاز هارموني)

د.م. ريم الصحناوي

reemsalman_seh@hotmail.com

الاهتزاز الهارموني للجمل غير المخمدة:

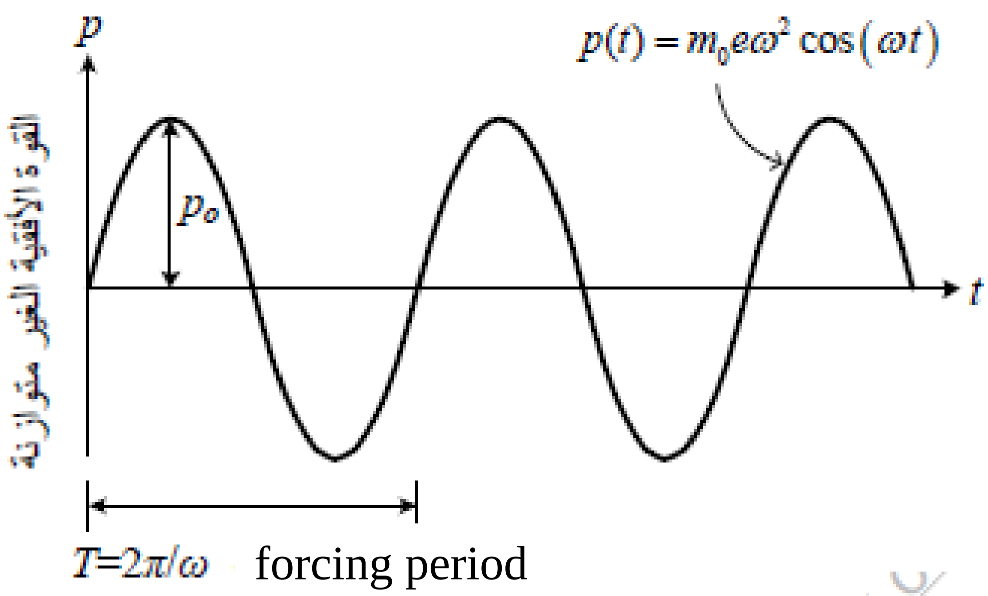
القوة الهارمونية:

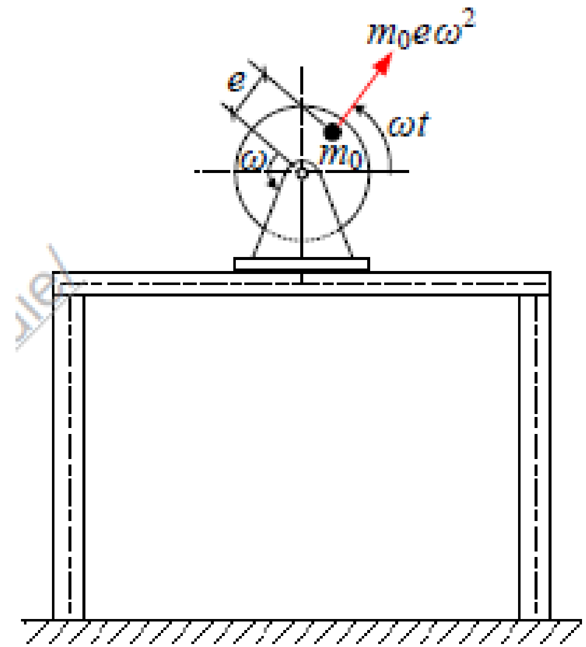
$$p(t) = po \sin \omega t$$
$$p(t) = po \cos \omega t$$

po: سعة القوة.

ω: تردد الإثارة أو التردد القسري.

$T = 2\pi/\omega$: دور الإثارة أو الدور القسري.





الاهتزاز الهارموني للجمل غير المخمدة:

معادلة الحركة:

باستبدال القوة الديناميكية في المعادلة التفاضلية للحركة بالقوة الهارمونية القسرية $p(t) = po \sin \omega t$ لجملة غير مخمدة:

$$m\ddot{u} + ku = po \sin(\omega t)$$

يتم حل هذه المعادلة لايجاد الانتقال أو التشوه للجملة u(t) الخاضعة للشروط الابتدائية للحركة:

$$u = u(0) \qquad \dot{u} = \dot{u}(0)$$

الحل الخاص لهذه المعادلة التفاضلية:

$$u_p(t) = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \qquad \omega \neq \omega_n$$

الحل المكمل لهذه المعادلة هو عبارة عن استجابة اهتزاز حر:

$$u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

الاهتزاز الهارموني للجمل غير المخمدة:

معادلة الحركة:

الحل الكامل هو مجموع الحل الخاص والحل المكمل:

$$u(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{p_o}{k}\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\sin\omega t$$

وبالتالي، معادلة اللإستجابة للاهتزاز الهارموني لجملة غير مخمدة:

$$u(t) = u_0\cos\omega_n t + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{P_0}{k}\frac{\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}\right]\sin\omega_n t + \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}\sin\omega t$$

الاهتزاز الحر أو العابر

Free vibration or transient vibration

الاهتزاز القسري أو المستقر

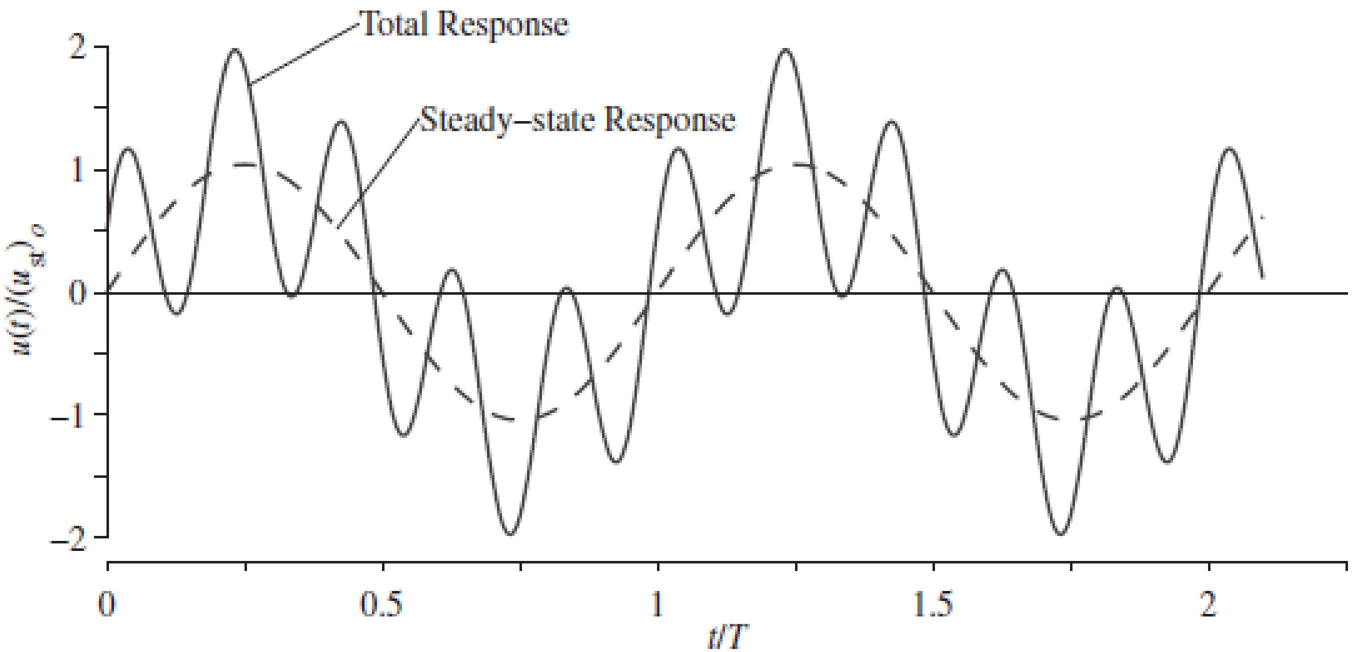
forced vibration or steady-state vibration

1. الحد المرافق ل $\sin\omega t$ يعطي تأرجح بالتردد القسري.
2. الحد المرافق ل $\sin\omega_n t$ و $cos\,\omega_n t$ يعطي تأرجح بتردد الجملة الطبيعي.

الاهتزاز الهارموني للجمل غير المخمدة:

معادلة الحركة:

يبقى **الاهتزاز القسري أو الاهتزاز المستقر** طالما القوة القسرية مطبقة بغض النظر عن الشروط الابتدائية للحركة. وهو موجود حتى ولو كانت $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.
يعتمد **الاهتزاز الحر أو الاهتزاز العابر** على الانتقال الابتدائي والسرعة الابتدائية.



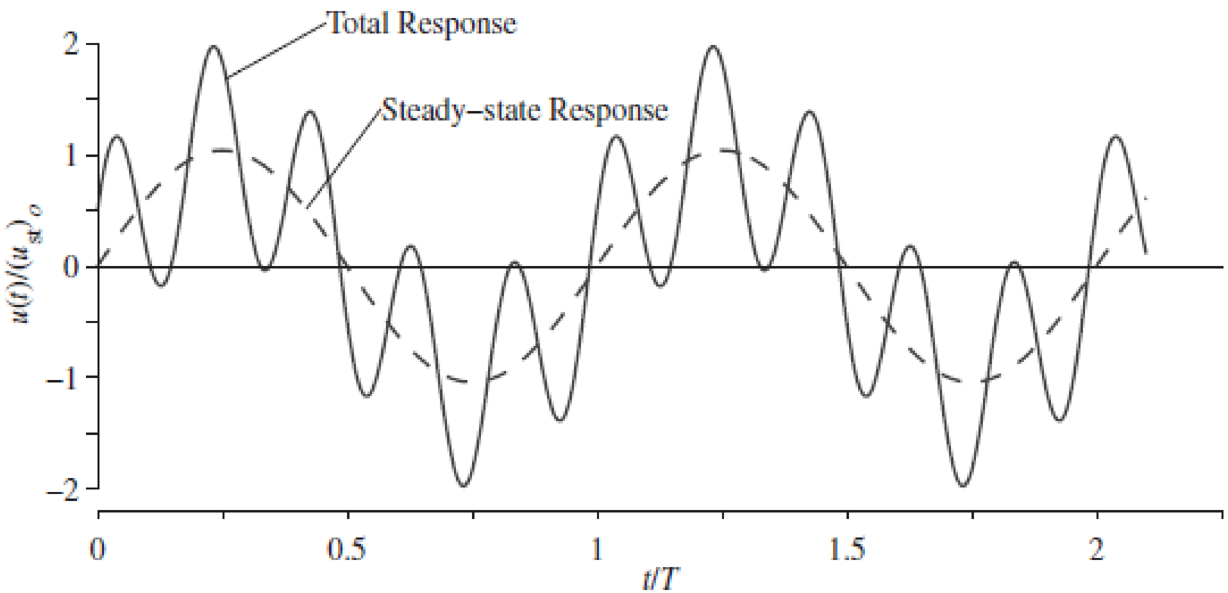
الاهتزاز الهارموني للجمل غير المخمدة:

معادلة الحركة:

$(u_{st})_0 = \frac{P_0}{k}$ تشوه ستاتيكي

$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$ نسبة التردد

$$u(t) = \underbrace{u_0 \cos \omega_n t + [\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - (u_{st})_0 \frac{\beta}{1-\beta^2}] \sin \omega_n t}_{\text{اهتزاز حر أو اهتزاز عابر}} + \underbrace{(u_{st})_0 \frac{1}{1-\beta^2} \sin \omega t}_{\text{اهتزاز قسري أو اهتزاز مستقر}}$$



الاهتزاز الهارموني للجمل غير المخمدة:

الاستجابة الديناميكية المستقرة:

$$u(t) = (u_{st})_0 \frac{1}{1-\beta^2} \sin \omega t$$

التشوه الستاتيكي:

$$u_{st}(t) = \frac{P_0}{k} \sin \omega t$$

القيمة العظمى للتشوه الستاتيكي:

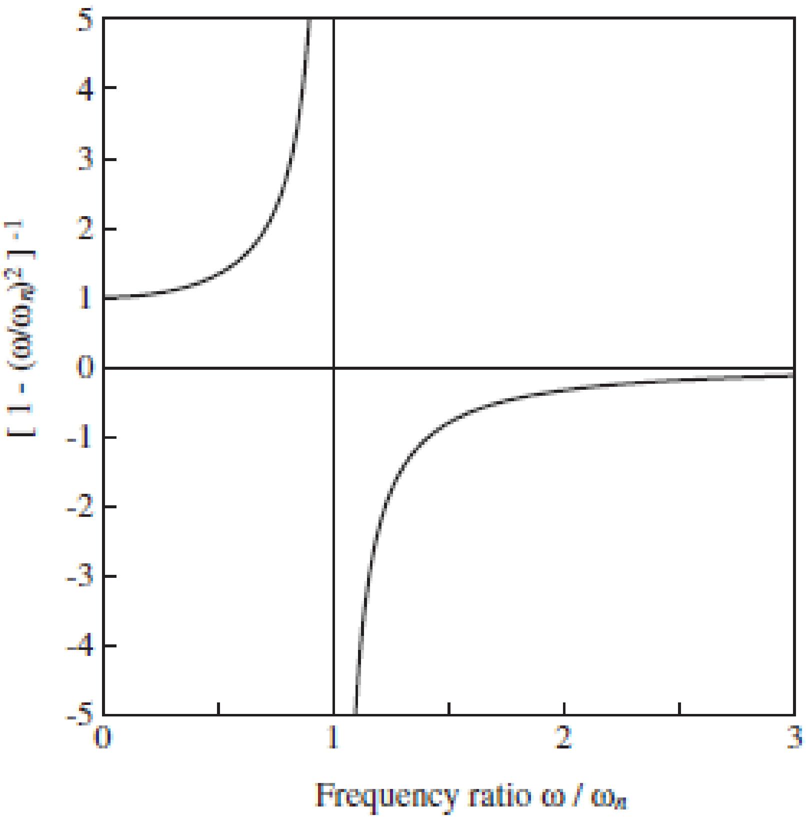
$$(u_{st})_0 = \frac{P_0}{k}$$

u_o: سعة الانتقال الديناميكي u(t)

$$u_0 = \left| (u_{st})_0 \frac{1}{1-\beta^2} \right| = (u_{st})_0 \left| \frac{1}{1-\beta^2} \right|$$

الاهتزاز الهارموني للجمل غير المخمدة:

الاستجابة الديناميكية المستقرة:



$$u(t) = (u_{st})_0 \frac{1}{1-\beta^2} \sin \omega t$$

من أجل **$\omega/\omega n < 1$ or $\omega < \omega n$:**

- $\frac{1}{1-\beta^2} > 0$
- u(t) و p(t) لهما نفس الإشارة الجبرية.
- الانتقال متوافق بالصفحة مع القوة المطبقة.

من أجل **$\omega/\omega n > 1$ or $\omega > \omega n$:**

- $\frac{1}{1-\beta^2} < 0$
- u(t) و p(t) لهما إشارة متعاكسة.
- الانتقال غير متوافق بالصفحة مع القوة المطبقة.

الاهتزاز الهارموني للجمل غير المخمدة:

الاستجابة الديناميكية المستقرة:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \emptyset) = (u_{st})_0 R_d \sin \omega t$$

معامل استجابة التشوه:

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{|1 - \beta^2|}$$

Rd: نسبة السعة u_o للتشوهات الديناميكية إلى التشوهات الستاتيكية $(u_{st})_o$.

∅: زاوية الصفحة

$$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \omega < \omega_n \; or \beta < 1 \\ 180^\circ & \omega > \omega_n \; or \beta > 1 \end{cases}$$

$\omega < \omega n$, $\emptyset = 0^\circ$:

تتغير الانتقالات بتغير إشارة $\sin \omega t$, الإنتقال متوافق بالصفحة مع القوة المطبقة.

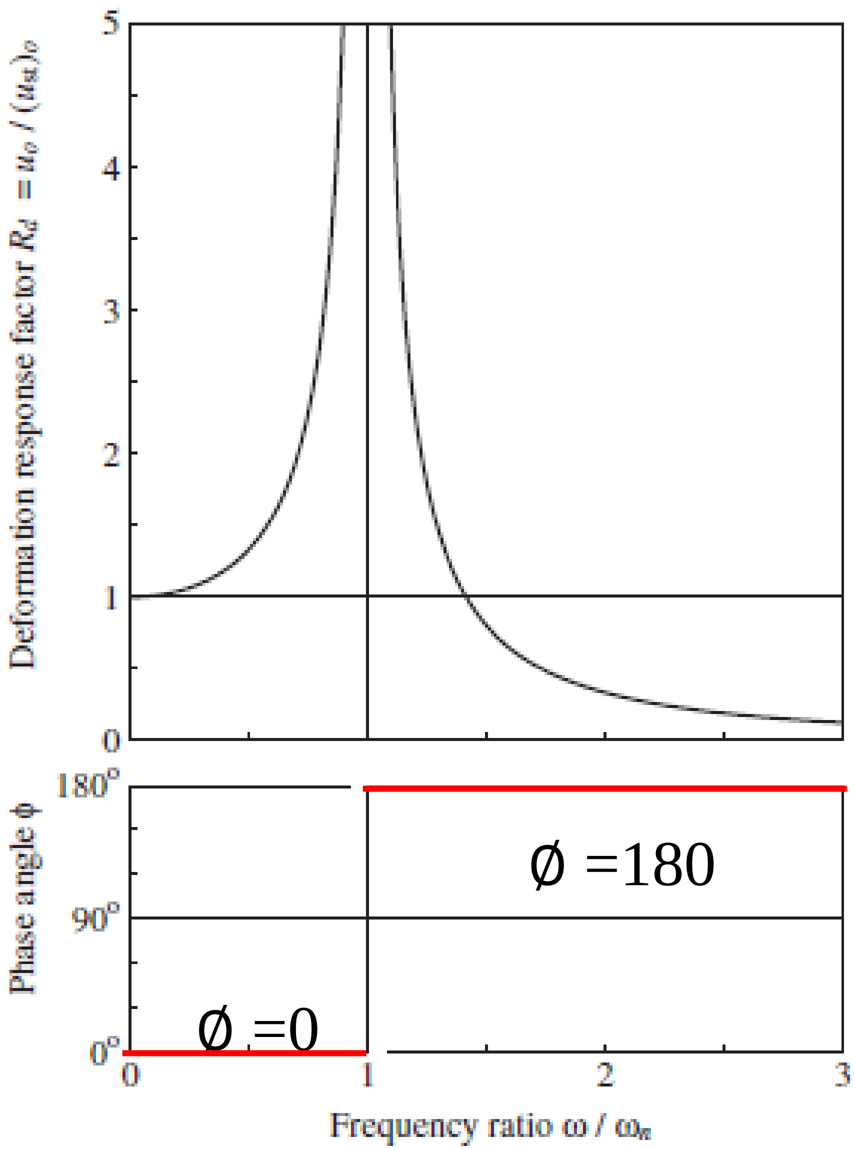
$\omega > \omega n$, $\emptyset = 180^\circ$:

تتغير الانتقالات بتغير إشارة $-\sin \omega t$, الإنتقال غيرمتوافق بالصفحة مع القوة المطبقة.

الاهتزاز الهارموني للجمل غير المخمدة:

الاستجابة الديناميكية المستقرة:

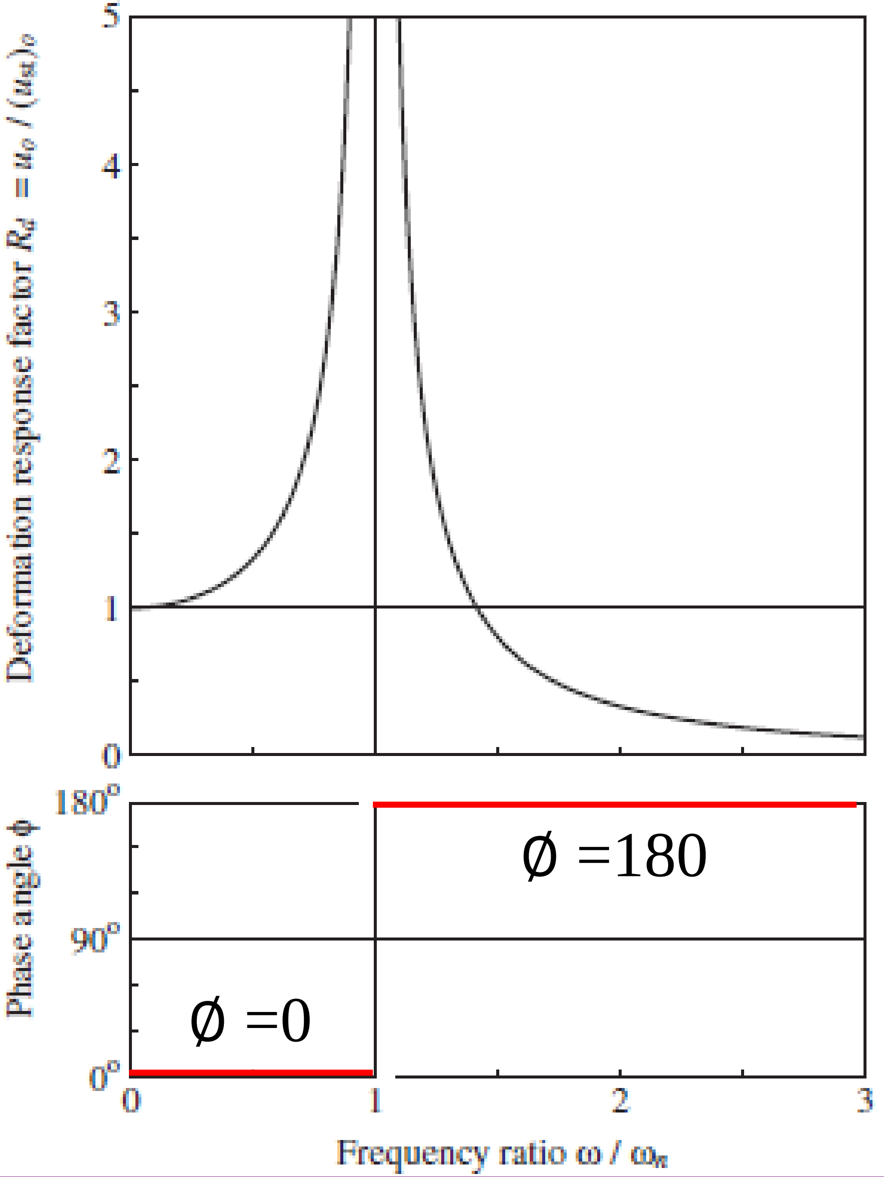
$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{1-\beta^2}$$



- ✓ في حال ω/ω_n صغيرة، R_dأكبر بقليل من 1.
- ✓ If $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, $R_d < 1$.
- ✓ في حال ω/ω_n تزيد عن $\sqrt{2}$ ، تصبح R_d أصغر وتسعى للصفر عندما $\omega/\omega_n \to \infty$

في حال ω/ω_n قريبة من *1*، R_dأكبر بكثير من 1.

الاهتزاز الهارموني للجمل غير المخمدة:



الاستجابة الديناميكية المستقرة:

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\text{if} \quad \beta = 1 \quad (\text{i.e. } \omega = \omega_n)$$
$$\Rightarrow R_d \to \infty \Rightarrow u_o \to \infty$$

تردد الطنين: هو عبارة عن التردد القسري عند قيمة عظمى ل R_d.

الاهتزاز الهارموني للجمل غير المخمدة:

في حال $\omega = \omega_n$، يصبح حل معادلة الحركة غير محقق.

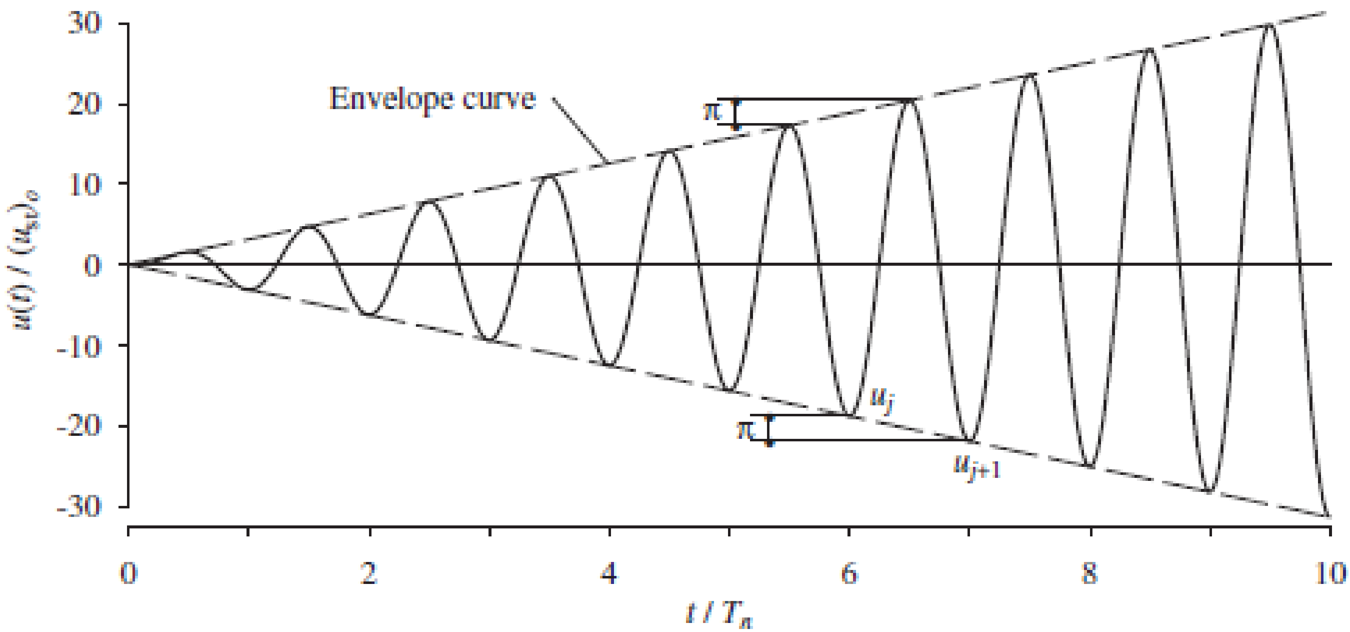
في هذه الحالة فإن اختيار التابع $C \sin \omega t$ من أجل الحل الخاص غير صحيح لأنه أيضاً جزء من الحل المكمل.

الحل الخاص من أجل $\omega = \omega n$:

$$u_p(t) = -\frac{p_o}{2k}\omega_n t \cos \omega_n t \qquad \omega = \omega_n$$

وبالتالي يكون الحل الكلي:

$$u(t) = -\frac{1}{2}\frac{p_o}{k}(\omega_n t \cos \omega_n t - \sin \omega_n t)$$



الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

الاستجابة المستقرة والإستجابة العابرة:

معادلة الحركة التفاضلية:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = po\sin(\omega t) \qquad u = u(0) \qquad \dot{u} = \dot{u}(0)$$

الحل الخاص:

$$u_p(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t$$

حيث:

$$C = \frac{p_o}{k}\frac{1-(\omega/\omega_n)^2}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$

$$D = \frac{p_o}{k}\frac{-2\zeta\omega/\omega_n}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$

الحل المكمل:

$$u_c(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)$$

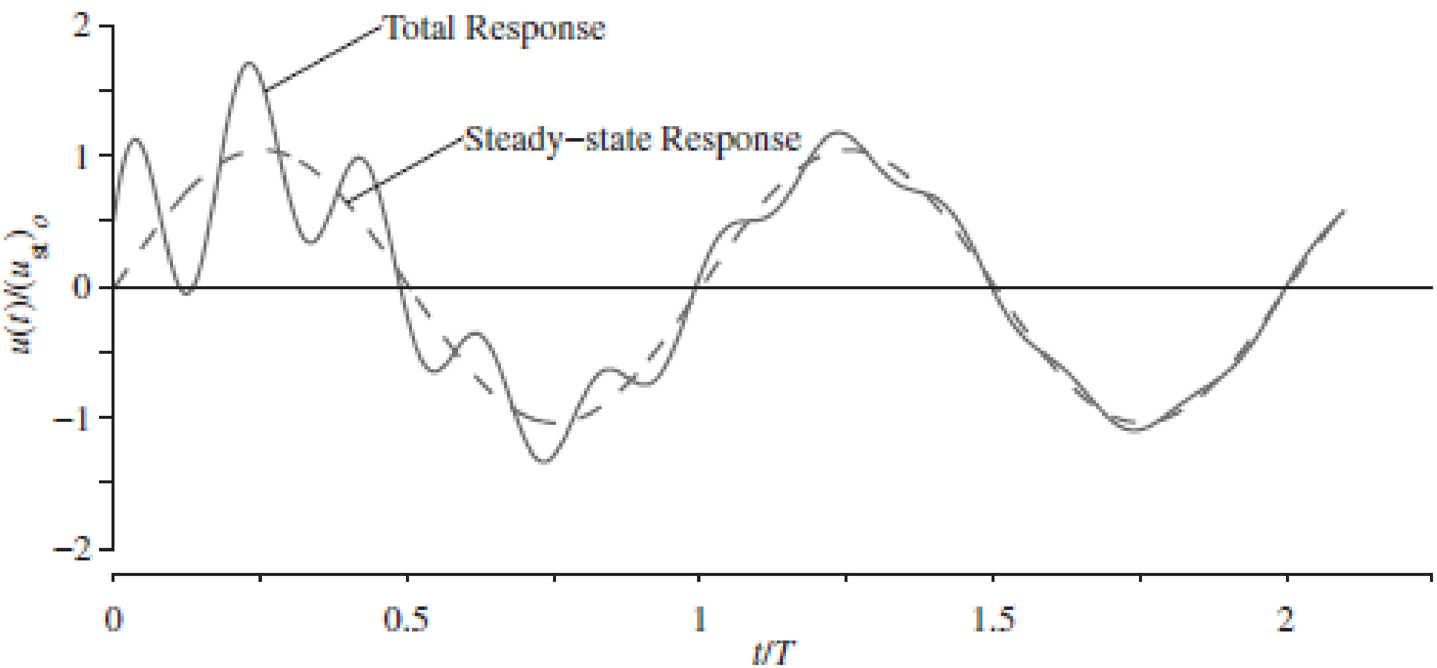
where $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

الاستجابة المستقرة والإستجابة العابرة:

الحل الكلي:

$$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)}_{\text{transient}} + \underbrace{C\sin\omega t + D\cos\omega t}_{\text{steady state}}$$



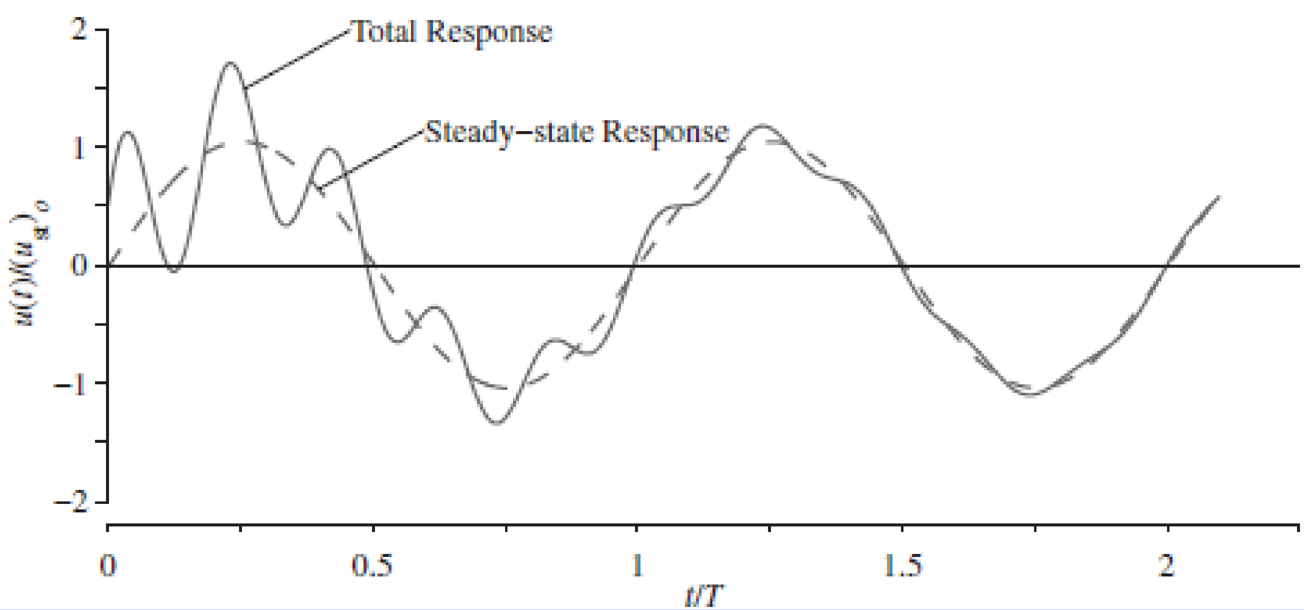
تحتوي u(t) على مركبتي إهتزاز:الاهتزاز القسري (ω) والاهتزاز الحر (ω_n).

الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

الاستجابة المستقرة والإستجابة العابرة:

الحل الكلي:

$$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)}_{\text{transient}} + \underbrace{C\sin\omega t + D\cos\omega t}_{\text{steady state}}$$



تتناقص سعة الاهتزاز الحر أسياً مع الزمن تناسباً مع ω/ωn و ζ . وبالتالي يتم إهمال الإستجابة الحرة، ولهذا سميت بالإستجابة العابرة. وبعد مرور زمن معين تبقى فقط الإستجابة القسرية، ولهذا سميت بالإستجابة المستقرة.

الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

الإستجابة من أجل $\omega = \omega_n$

تأثير التخامد على الإستجابة المستقرة في تحديد سعة الإستجابة عندما تكون الإستجابة القسرية مساوية للإهتزاز الطبيعي للمنشأ (حدوث الطنين)

من أجل $\boldsymbol{\omega = \omega_n}$: $\boldsymbol{C = 0}$ و $D = -(ust)o/2\zeta$

من أجل $\boldsymbol{\omega = \omega_n}$ وشروط ابتدائية مساوية للصفر:

$A = (ust)o/2\zeta$ and $B = (ust)o/2\sqrt{1 - \zeta^2}$.

$$u(t) = (u_{st})_o \frac{1}{2\zeta}\left[e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D t\right) - \cos\omega_n t\right]$$

في حالة الجمل ذو التخامد القليل يكون حد الجيبي صغير يمكن إهماله و $\omega_D \approx \omega_n$ وبالتالي:

$$u(t) \simeq \underbrace{(u_{st})_o \frac{1}{2\zeta}(e^{-\zeta\omega_n t} - 1)}_{\text{envelope function}} \cos\omega_n t$$

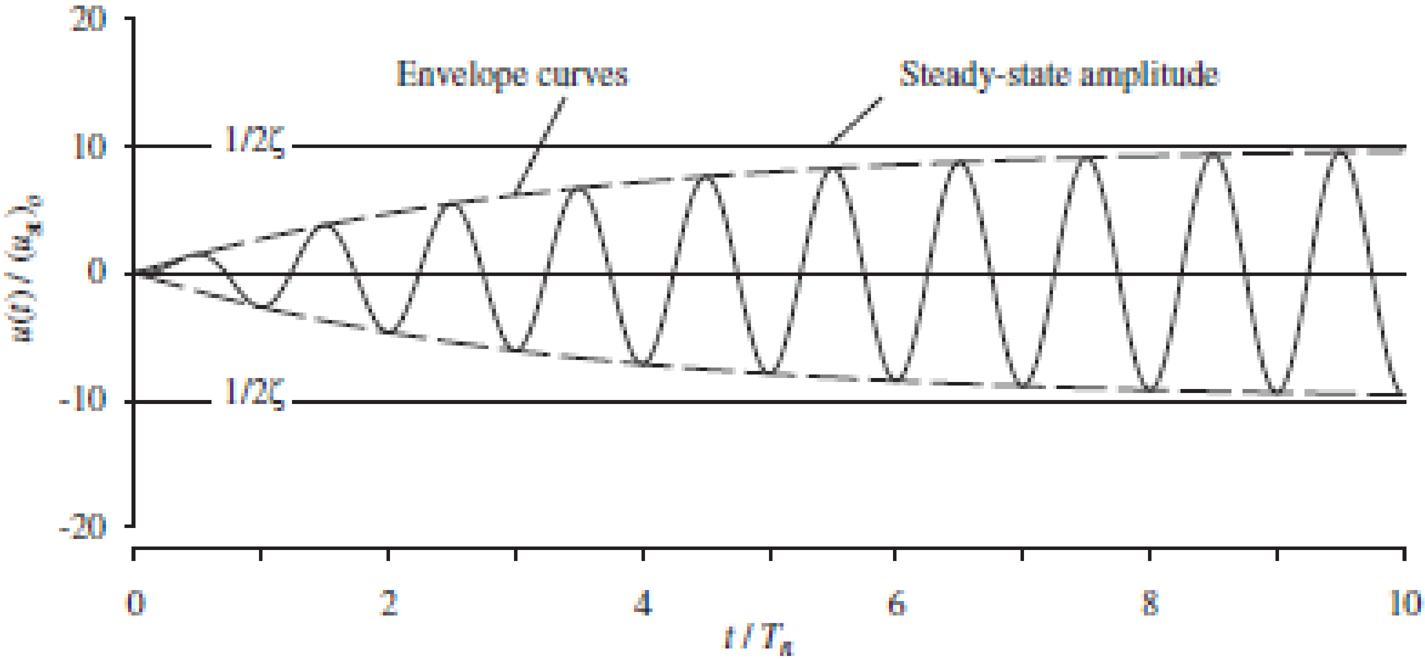
الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

الإستجابة من أجل $\omega = \omega_n$

$$u(t) \simeq \underbrace{(u_{st})_o \frac{1}{2\zeta}(e^{-\zeta\omega_n t} - 1)}_{\text{envelope function}} \cos \omega_n t$$

يقلل التخامد من سعة كل ذروة ويحد من الإستجابة لقيمة محدودة.

$$\boxed{u_o = \frac{(u_{st})_o}{2\zeta}}$$



الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

الإزاحة العظمى وفرق الصفحة:

التشوهات المستقرة للجملة الخاضعة لإهتزاز هارموني:

$$u(t) = u_o \sin(\omega t - \phi) = (u_{st})_o R_d \sin(\omega t - \phi)$$

من أجل سعة إستجابة $u_o = \sqrt{C^2 + D^2}$ وفرق الصفحة $D.\emptyset = \tan^{-1}(-D/C)$

بالتعويض بقيم C و D نحصل على معامل استجابة التشوه R_d.

معامل استجابة التشوه

$$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o} = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}}$$

زاوية الصفحة أو فرق الصفحة

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

$$u(t) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \emptyset)$$

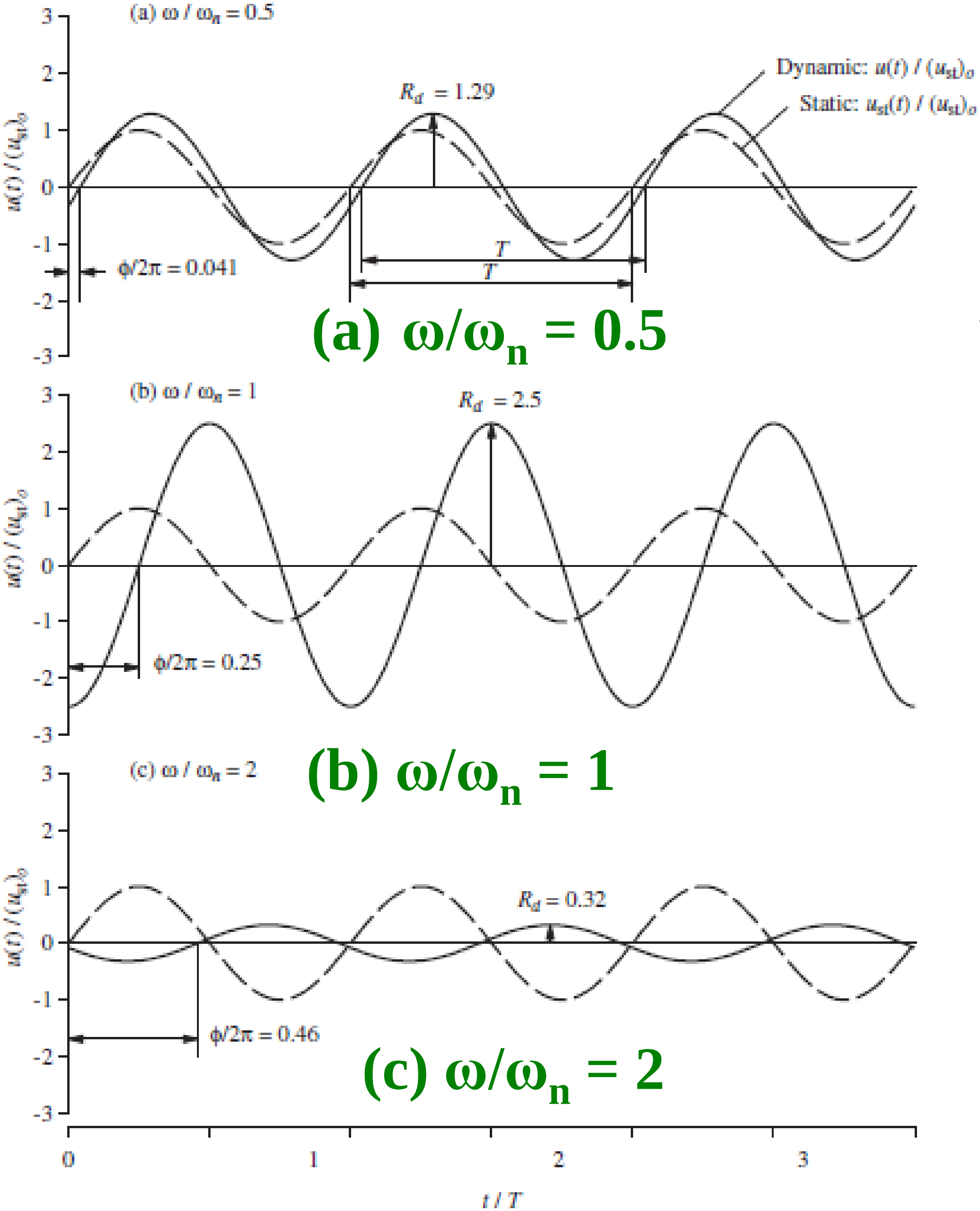
الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

الإزاحة العظمى وفرق الصفحة:

- ✓ لجميع المخططات: $\zeta = \mathbf{0.20}$
- ✓ التشوهات الستاتيكية الناتجة عن p(t). (الخط المنقط)

$$u_{st}(t) = \frac{p(t)}{k} = \frac{p_o \sin(\omega t)}{k}$$

- ✓ الدور القسري للحركة المستقرة $T = 2\pi/\omega$، ولكن فرق الصفحة $\textbf{lag} = \emptyset/2\pi$



$$u(t) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \emptyset)$$

الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

الإزاحة العظمى وفرق الصفحة:

منحني الإستجابة ـ التردد:

معامل استجابة التشوه R_d

1. من أجل $\omega/\omega_n \ll 1$:

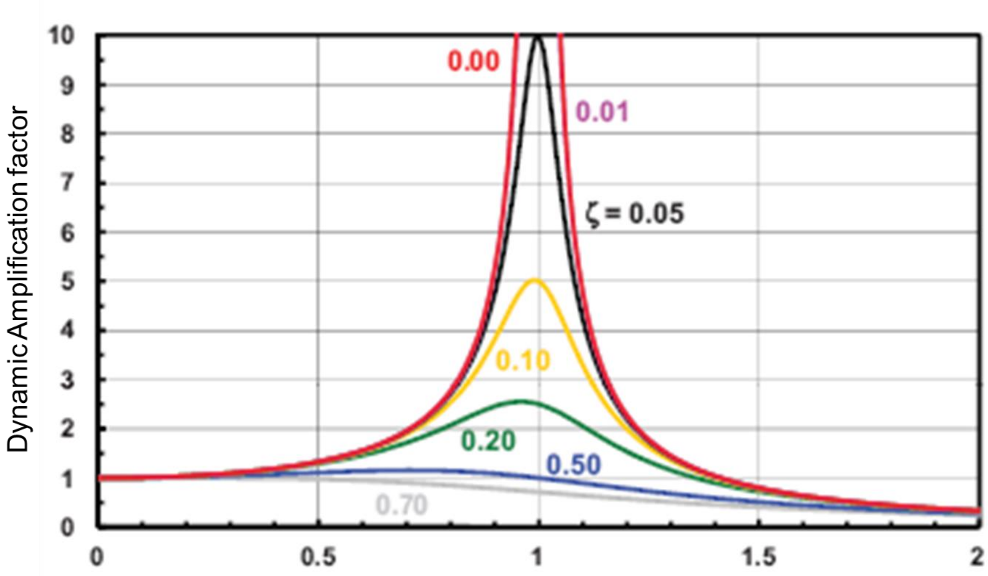
Rd أكبر بقليل من 1 ومستقل عن التخامد.

وبالتالي: $u_o \simeq (u_{st})_o = \frac{p_o}{k}$

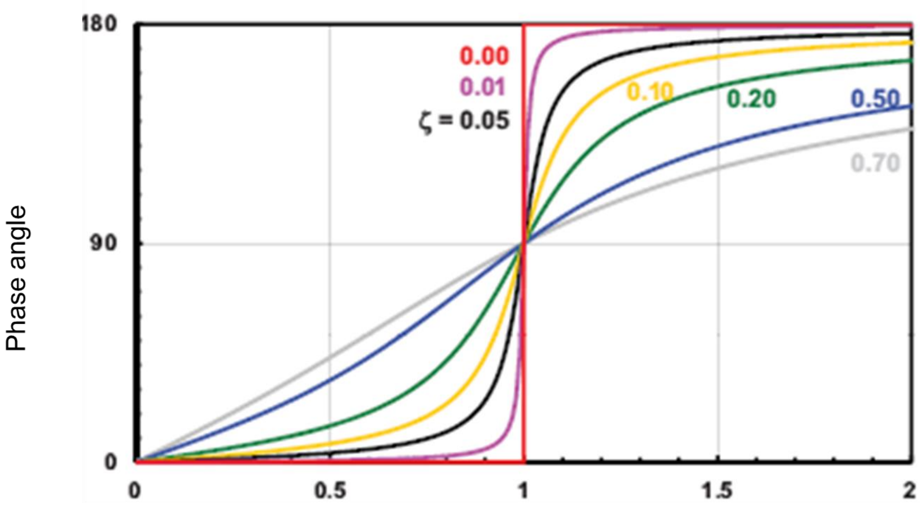
$\phi = 0°$ والإنتقالات متوافقة بالصفحة مع القوة المطبقة.

ومنه نستنتج أن:

سعة الإستجابة الديناميكية تساوي إلى التشوه الستاتيكي وتتعلق بقساوة المنشأ.



ω/ω_n



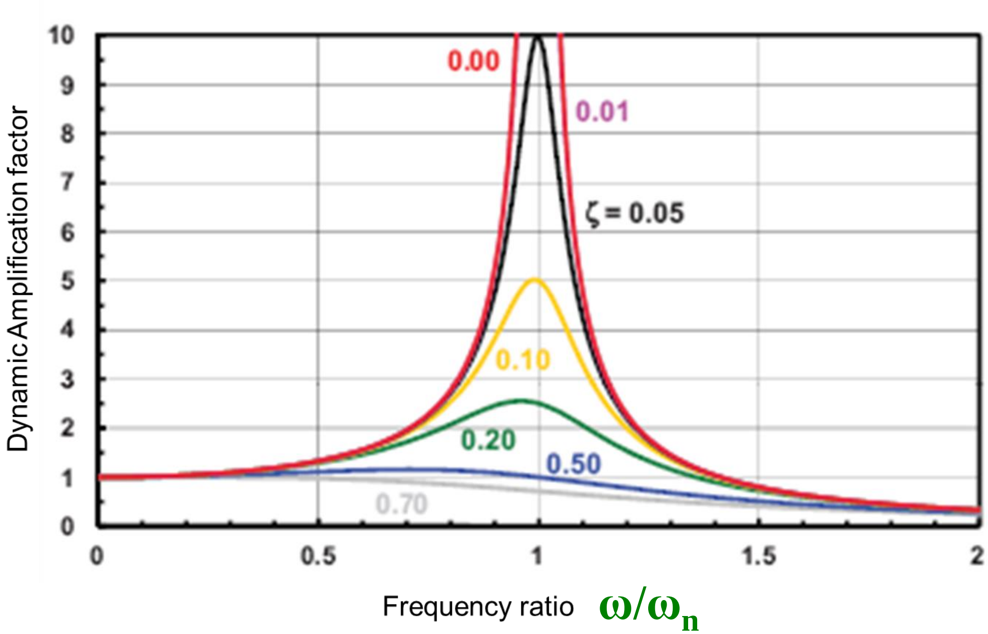
ω/ω_n

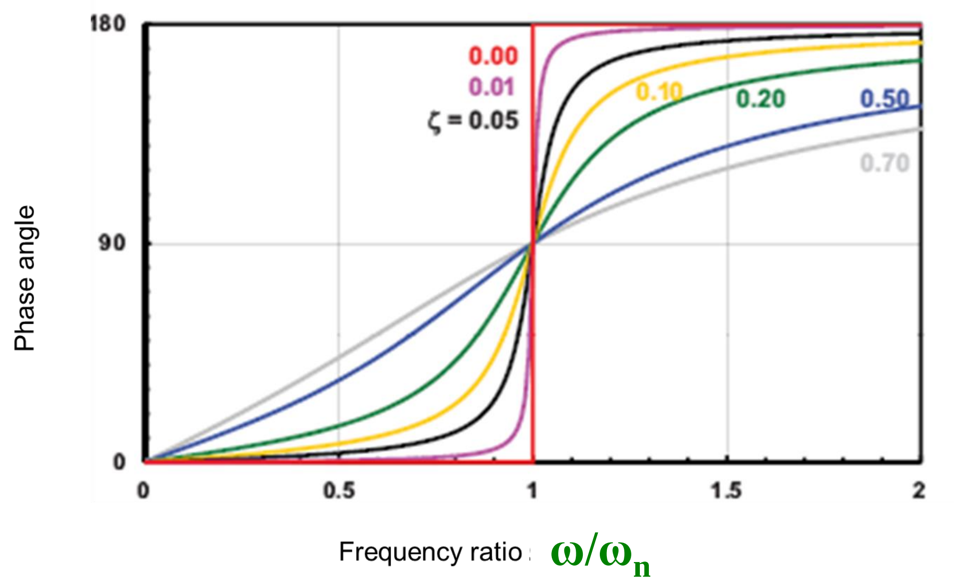
$$u(t) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \emptyset)$$

الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

الإزاحة العظمى وفرق الصفحة:

منحني الإستجابة – التردد:





معامل استجابة التشوه R_d

2. من أجل $\omega/\omega_n \gg 1$:

Rd تسعى للصفر بزيادة النسبة ω/ω_n وهي غير مرتبطة بالتخامد بشكل أساسي.

من أجل القيم الكبيرة ل ω/ω_n : يمكن للحد $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4$ أن يتم تقريبه، وبالتالي:

$$u_o \simeq (u_{st})_o \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{p_o}{m\omega^2}$$

$\phi \approx 0°$ والإنتقالات غيرمتوافقة بالصفحة مع القوة المطبقة.

ومنه نستنتج أن:

الإستجابة تتعلق بكتلة المنشأ.

$$u(t) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \emptyset)$$

الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

الإزاحة العظمى وفرق الصفحة:

منحني الإستجابة – التردد:

معامل استجابة التشوه R_d

3. من أجل $\omega/\omega_n \approx 1$:

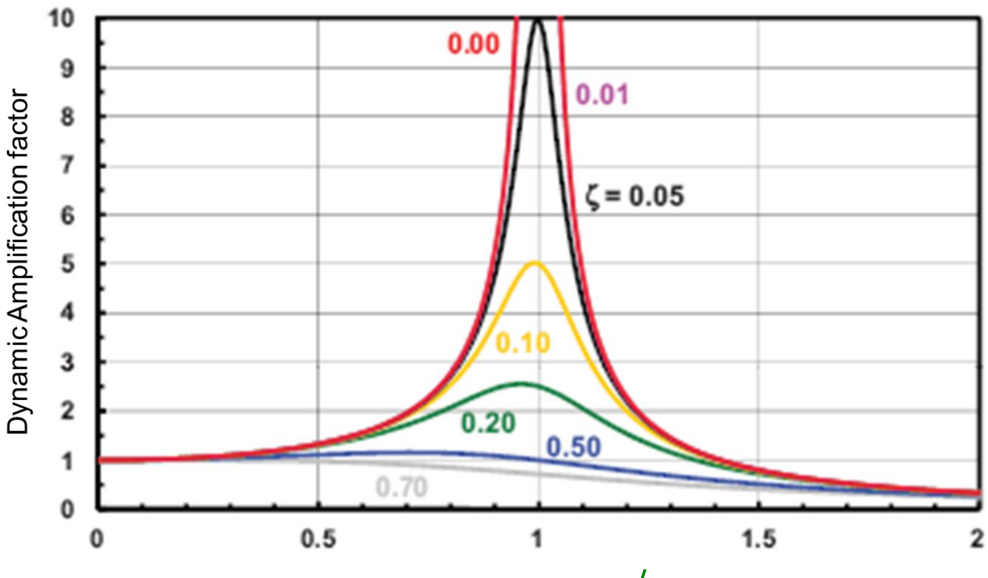
Rd حساس جداً للتخامد.من أجل تخامد صغير: $R_d \gg 1$ وذلك يؤدي إلى استجابة ديناميكية أكبر بكثير من الإستجابة الستاتيكية.

$$u_o = \frac{(u_{st})_o}{2\zeta} = \frac{p_o}{c\omega_n}$$

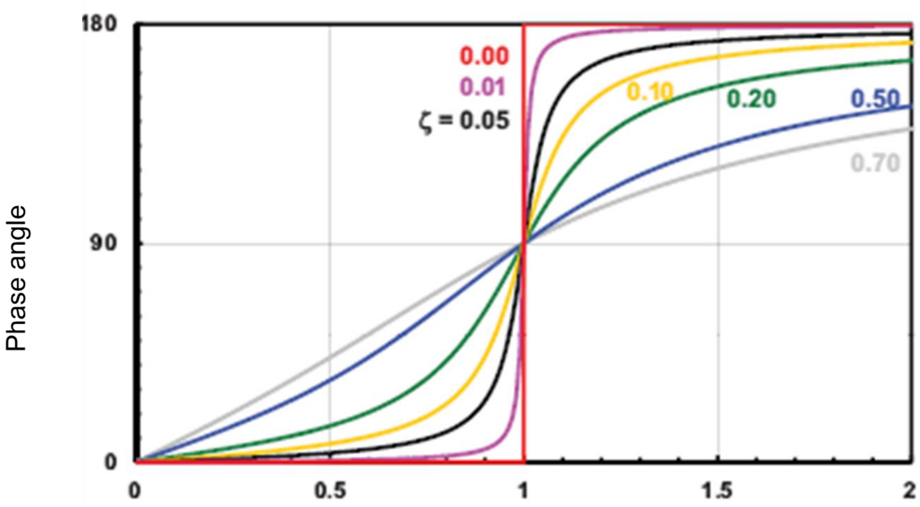
$\phi = 90°$ من اجل كل قيم ζ، وتصل الإنتقالات لقيمتها العظمى عندما تمر القوة المطبقة من الصفر.

ومنه نستنتج أن:

الإستجابة الديناميكية تتعلق بتخامد المنشأ.



ω/ω_n



ω/ω_n

الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

معاملات الاستجابة الديناميكية:

$$\boxed{u(t) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \emptyset)}$$

1. **معامل استجابة الإنتقال (التشوه):**

$$R_d = \frac{u_0}{\frac{P_0}{k}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$

يعرف تردد الطنين بالتردد القسري عندما تكون سعة الإستجابة أعظمية

$$\beta = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \Rightarrow \quad R_d = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

معاملات الاستجابة الديناميكية:

$$u(t) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \emptyset)$$

2. معامل استجابة السرعة:

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_o/\sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \phi)$$

$$: R_v = \frac{\dot{u}_0}{\frac{P_0}{\sqrt{km}}} = \beta R_d$$

يعرف تردد الطنين بالتردد القسري عندما تكون سعة الإستجابة أعظمية

$$\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad R_v = \frac{1}{2\zeta}$$

الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

معاملات الاستجابة الديناميكية:

$$\mathrm{u}(t) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \emptyset)$$

3. معامل استجابة التسارع:

$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_o/m} = -R_a \sin(\omega t - \phi)$$

$$: R_a = \frac{\ddot{u}_0}{\frac{P_0}{m}} = \beta^2 R_d$$

يعرف تردد الطنين بالتردد القسري عندما تكون سعة الإستجابة أعظمية

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \Rightarrow R_a = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

الاهتزاز الهارموني لجمل ذو تخامد لزج:

معاملات الاستجابة الديناميكية:

$$\boxed{\mathrm{u}(t) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \emptyset)}$$

العلاقة بين معاملات الإستجابة الديناميكية:

$$\boxed{\frac{R_a}{\beta} = R_v = \beta R_d}$$

معاملات الإستجابة الديناميكية في حالة الطنين:

$$\boxed{R_d = R_v = R_a = \frac{1}{2\zeta}}$$

مثال 1:

جملة وحيدة درجة الحرية خاضعة لإهتزاز هارموني. تنتقل الجملة بسعة انتقال U0 .

أوجد نسبة التخامد للجملة في حالة:

1- من أجل $\omega = \omega_n$ ، $u_o = 12.5cm$

2- من أجل $\omega = 5\omega_n$ ،$u_o = 0.05cm$

الحل 1:

Case 1:

At $\omega = \omega_n$,

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 1 \Rightarrow \beta = 1 \quad \text{But when} \quad \beta = 1 \Rightarrow R_d = \frac{1}{2\zeta}$$

$$R_d = \frac{1}{2\zeta} \rightarrow \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{2\zeta} \rightarrow u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \rightarrow 0.125 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\zeta = \frac{(u_{st})_0}{0.25}}$$

Case 2:

At $\omega = 5\omega_n$,

$$\Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = 5 \Rightarrow \beta = 5 \quad \text{When} \quad \beta > 4 \Rightarrow R_d = \frac{1}{\beta^2} \Rightarrow R_d = \frac{1}{25}$$

$$R_d = \frac{1}{25} \rightarrow \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{25} \rightarrow u_0 = \frac{(u_{st})_0}{25} \rightarrow 0.0005 = \frac{(u_{st})_0}{25}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{(u_{st})_0 = 0.0125m}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\zeta = \frac{(u_{st})_0}{0.25} = \frac{0.0125}{0.25} = 0.05}$$

مثال 2:

جملة وحيدة درجة الحرية غير متخامدة ذو قساوة k وكتلة m وتردد طبيعي ω_n. تم إخضاع الجملة لإهتزاز هارموني لتحديد هذه الخواص الديناميكية للجملة. بتطبيق تواتر قسري للاهتزاز بمقدار 5Hz، ازدادت قيمة الاستجابة بشكل غير محدود (شروط الطنين).

وبعد ذلك، تم إضافة وزن بمقدار $\Delta w \;= 40N$ إلى الكتلة m وتم إعادة تجربة الطنين. حدث الطنين في هذه الحالة عند تواتر قسري مقداره f = 2.5 Hz.

أوجد كتلة وقساوة الجملة.

الحل 2:

شروط الطنين $\beta = 1 \Rightarrow \omega = \omega_n$

Case 1 (طنين):

$\beta = 1 \Rightarrow \omega = \omega_n$ $f = \dfrac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi f$ $\rightarrow \ \omega = 2\pi \times 5 = 10\pi \ \ rad/sec$

$$\rightarrow \ \omega = \omega_n = 10\pi \, rad/\sec \ \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\pi \quad \rightarrow k = 100\pi^2 \cdot m$$

Case 2:

$$\Delta W = 40N \quad \rightarrow \ m_{new} = m + \frac{40}{9.81} = m + 4.08$$

$\beta = 1 \Rightarrow \omega = \omega_n$ $\rightarrow \ \omega = 2\pi f = 2\pi \times 2.5 = 5\pi \ \ rad/sec$

$$\rightarrow \ \omega = \omega_n = 5\pi \, rad/\sec \ \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m + 4.08}} = 5\pi \quad \rightarrow k = 25\pi^2 \cdot m + 100\pi^2$$

$Thus \ : 100\pi^2 \cdot m = 25\pi^2 \cdot m + 100\pi^2 \quad \rightarrow \quad m = 1.33kg \quad \rightarrow \ k = 133.33\pi^2$ N/m

مثال 3:

تم إثارة جملة وحيدة درجة الحرية بقوة جيبية. قيست قيمة سعة الانتقال في حالة الطنين وكانت مساوية ل 10cm.وعندما وصلت قيمة التردد القسري إلى عشر قيمة التردد الطبيعي، كانت سعة الانتقال مساوية ل 1cm.

أوجد نسبة التخامد للجملة.

الحل 3:

A resonant condition:

$$\beta = 1 \Rightarrow \omega = \omega_n \quad R_d = \frac{1}{2\zeta}$$

Case 1 (Resonant):

$$R_d = \frac{1}{2\zeta} \quad \rightarrow u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \rightarrow 0.1 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\zeta = \frac{(u_{st})_0}{0.2}}$$

Case 2:

$$\omega = \frac{1}{10}\,\omega_n \quad \rightarrow \beta = 0.1 \quad \rightarrow R_d \approx 1 \quad \rightarrow \quad u_0 = (u_{st})_0 \quad \rightarrow (u_{st})_0 = 0.01m$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\zeta = \frac{(u_{st})_0}{0.2} = \frac{0.01}{0.2} = 0.05 < 20\%}$$

مثال 4:

بإجراء تجربة اهتزاز قسري بإثارة هارمونية، تم ملاحظة أن سعة الحركة عند الطنين مساوية ل أربع أضعاف سعة الحركة عند تردد قسري أكبر ب 20% من تردد الطنين. أوجد نسبة التخامد للجملة.

الحل 4:

A resonant condition:

$$\beta = 1 \Rightarrow \omega = \omega_n \quad R_d = \frac{1}{2\zeta}$$

$$(u_o)_{\omega=\omega_n} = 4(u_o)_{\omega=1.2\omega_n}$$

Case 1 (Resonant):

$$R_d = \frac{1}{2\zeta} \quad \rightarrow \quad (u_0)_{\omega=\omega_n} = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta}$$

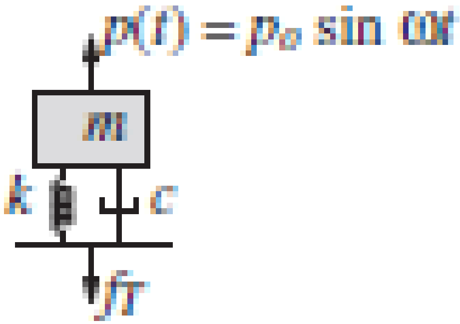
Case 2:

$$\omega = 1.2 \ \omega_n \quad \rightarrow \beta = 1.2 \quad \rightarrow$$

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad \Longrightarrow \quad (u_o)_{\omega=1.2\omega_n} = \frac{(u_{st})_o}{\sqrt{193.6\times10^{-3} + 5.76\zeta^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(u_{st})_o}{2\zeta} = 4\frac{(u_{st})_o}{\sqrt{193.6\times10^{-3} + 5.76\zeta^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\zeta} = 8\frac{1}{\sqrt{193.6\times10^{-3} + 5.76\zeta^2}} \quad \Rightarrow \quad \zeta = 0.0576$$

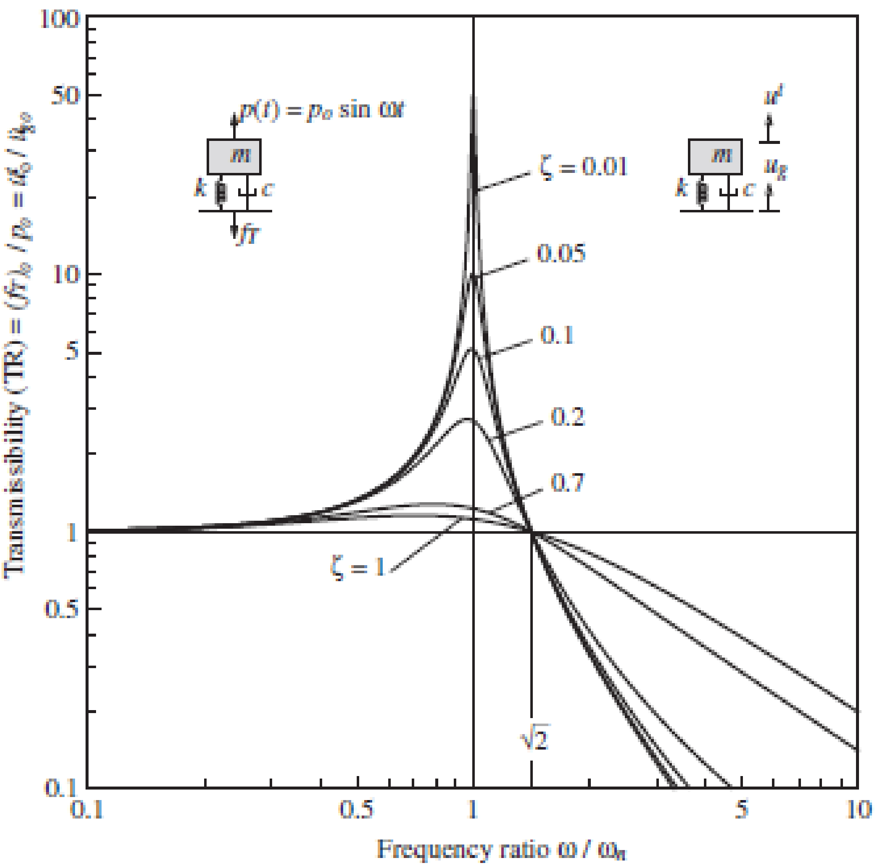
نقل القوة وعزل الإهتزاز:



نقل القوة إلى القاعدة:

$$f_T = f_S + f_D = ku(t) + c\dot{u}(t)$$

$$f_T(t) = (u_{st})_o R_d \left[k \sin(\omega t - \phi) + c\omega \cos(\omega t - \phi)\right]$$



القيمة العظمى للقوة $f_T(t)$:

$$(f_T)_o = (u_{st})_o R_d \sqrt{k^2 + c^2\omega^2}$$

using $(u_{st})_o = p_o/k$ and $\zeta = c/2m\omega_n$,

$$\frac{(f_T)_o}{p_o} = R_d \sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

نقل القوة وعزل الإهتزاز:

$$\frac{(f_T)_o}{p_o} = R_d\sqrt{1 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

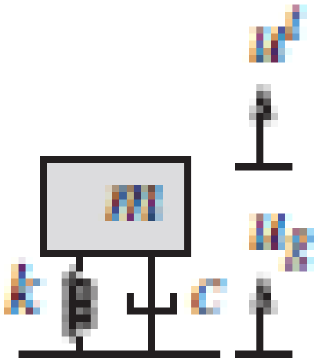
بتعويض معادلة R_d، نحصل على النسبة بين القوة الأعظمية المنقولة وسعة القوة المطبقة P_0 . وذلك ما يعرف بناقلية الجملة **transmissibility (TR)**

$$TR = \left\{\frac{1 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}\right\}^{1/2}$$

الإستجابة للحركة الأرضية وعزل الإهتزاز:

تحديد الإستجابة لجملة وحيدة درجة الحرية خاضعة لحركة أرضية هارمونية:

$$p_{\text{eff}}(t) = -m\ddot{u}_g(t) = -m\ddot{u}_{go}\sin\omega t$$



$$u(t) = \frac{-m\ddot{u}_{go}}{k} R_d \sin(\omega t - \phi)$$

تسارع الكتلة:

$$\ddot{u}^t(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)$$

نسبة سعة التسارع المنقول إلى الكتلة $\ddot{u}_0^t$ إلى سعة التسارع الأرضي $\ddot{u}_{go}$ يعرف أيضاً بناقلية الجملة **.transmissibility (TR)**

$$\mathrm{TR} = \frac{\ddot{u}_o^t}{\ddot{u}_{go}} = \left\{ \frac{1 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \right\}^{1/2}$$

Response to Ground Motion and Vibration Isolation:

إذا تم تعريف الحركة الأرضية بدلالة تابع انتقالها وليس التسارع:

$$u_g(t) = u_{go} \sin \omega t$$

تعرف الناقلية بنسبة سعة انتقال u_o^t للإنتقال الكلي للكتلة $u^t(t)$ إلى الإنتقال الأرضي u_{go} :

$$\mathrm{TR} = \frac{u_o^t}{u_{go}} = \left\{ \frac{1 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \right\}^{1/2}$$

Response to Ground Motion and Vibration Isolation:

- ✓ **إذا** $\boldsymbol{\omega n \ll \omega}$ فإن $\boldsymbol{\ddot{u}_{go} \approx \ddot{u}_0^t}$ (تنتقل الكتلة بشكل صلد مع الأرض، للكتلة والأرض نفس التسارع).
- ✓ إذا $\boldsymbol{\omega n \gg \omega}$ فإن $\boldsymbol{0 \approx \ddot{u}_0^t}$ **(تبقى الكتلة ساكنة في حال أن الأرض تتحرك).**

وهذا هو المفهوم الأساسي لعزل الكتلة عن حركة القاعدة، وذلك باستخدام نظام سند مرن جداً.

مثال 5:

تم تركيب آلة حساسة بوزن 500N في منطقة ذو تسارع أرضي شاقولي 0.1g وتواتر 10Hz. تم وضع هذه الآلة فوق وسادة مطاطية بقساوة 14kN/m. ونسبة تخامد للجملة 10%.

أوجد التسارع المنقول للآلة.

الحل 5:

$\ddot{u}_0^t$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{500}{9.81} = 50.97\ kg$$

$$k = 14 \times 10^3\ \text{N/m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{14 \times 10^3}{50.97}} = 16.57\ rad/sec$$

$$f = 10\ \text{Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 20\pi\ \text{rad/sec}$$

$$\omega_n = 16.57\ rad/sec$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{20\pi}{16.57} = 3.79$$

$$\text{TR} = \frac{\ddot{u}_o^t}{\ddot{u}_{go}} = \left\{ \frac{1 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \right\}^{1/2}$$

$$TR = \left[\frac{1 + (2 \times 0.1 \times 3.79)^2}{(1 - 3.79^2)^2 + (2 \times 0.1 \times 3.79)^2}\right]^{0.5} = 0.094$$

$$TR = \frac{\ddot{u}_o^t}{\ddot{u}_{go}} \Rightarrow \ddot{u}_o^t = TR\,\ddot{u}_{go} = 0.094 \times 0.1 \times g = 0.0094g$$